Énoncé Soit $0 < a < 1$ et $b > 1$ tels que $ab \geq 1$. La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k\geq 0} a^k cos(b^k x) \end{array}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable.

Lemme. Soit $v \in \mathcal{D}(]b^{-1}, b[)$ fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $]b^{-1}, b[$ telle que $v(1) = 1$.Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{u} = v$. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$.
Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_j = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(b^j(x-t))dx$$

Si f est dérivable en t, alors $b^{2j}c_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$

Preuve du lemme

Si f est dérivable en t, on a

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + R(x-t)$$

où $R(x-t) =_{x\to t} o(x-t)$. Alors :

$$c_j = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(b^j(x-t))dx = f(t)\int_{\mathbb{R}} u(b^j(x-t))dx + f'(t)\int_{\mathbb{R}}(x-t)u(b^j(x-t))dx + \int_{\mathbb{R}} R(x-t)u(b^j(x-t))dx$$

On regarde chacun des termes de plus près. Pour le premier, on a

$$\int_{\mathbb{R}} u(b^j(x-t))dx \underset{s=b^j(x-t)}{=} \int_{\mathbb{R}} u(s)\frac{ds}{b^j} = \frac{1}{b^j}\int_{\mathbb{R}} u(s)ds = \frac{\hat{u}(0)}{b^j} = \frac{v(0)}{b^j} = 0$$

Et pour le deuxième :

$$\int_{\mathbb{R}}(x-t)u(b^j(x-t))dx \underset{s=b^j(x-t)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{s}{b^j}u(s)\frac{ds}{b^j} = \frac{1}{b^{2j}}\int_{\mathbb{R}} su(s)ds = \frac{1}{b^{2j}}\hat{su}(0) = \frac{i\hat{u}'(0)}{b^{2j}} = \frac{iv'(0)}{b^{2j}} = 0$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x-t| \leq \delta \Longrightarrow |R(x-t)| < \varepsilon|x-t|$. Alors :

$$\begin{aligned} |\int_{|x-t|\leq\delta} R(x-t)u(b^j(x-t))dx| &\leq \varepsilon \int_{|x-t|\leq\delta} |x-t||u(b^j(x-t))|dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b^{2j}}\int_{|s|\leq\delta} |su(s)|ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b^{2j}}\int_{\mathbb{R}} |su(s)|ds = \frac{\varepsilon}{b^{2j}}\|su\|_{L^1} \end{aligned}$$

et :

$$|\int_{|x-t|>\delta} R(x-t)u(b^j(x-t))dx| \leq \int_{|x-t|>\delta} \frac{|R(x-t)|}{b^{3j}|x-t|^3} b^{3j}|x-t|^3|u(b^j(x-t))|dx$$

Or f est bornée et donc

$$\frac{|R(x-t)|}{|x-t|^3} = \frac{|f(x) - f(t) - f'(t)(x-t)|}{|x-t|^3} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{|x-t|^3} + \frac{|f'(t)|}{|x-t|^2}$$

est intégrable sur $\{|x-t| > \delta\}$.
Ainsi,

$$\frac{1}{b^{3j}}\int_{|x-t|>\delta} \frac{|R(x-t)|}{|x-t|^3} b^{3j}|x-t|^3|u(b^j(x-t))|dx \leq \frac{\|x^3u\|_\infty}{b^{3j}}\int_{|x-t|>\delta} \frac{|R(x-t)|}{|x-t|^3} \leq \frac{C}{b^{3j}}$$

Finalement :

$$|b^{2j}c_j| \leq \varepsilon \|su\|_{L^1} + \underbrace{\frac{C}{b^j}}_{\xrightarrow[j\to+\infty]{}0} \leq \tilde{C}\varepsilon$$

pour j assez grand, ce qui termine la démonstration du lemme.

Démonstration de l'énoncé

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k \colon x \mapsto a^k cos(b^k x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, avec $\|f\|_\infty \leq a^k$ qui est le terme général d'une série convergente (puisque $a < 1$).
La série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge donc normalement vers F et F est continue sur $\mathbb{R}$ (et bornée).

Soit $t \in \mathbb{R}$. On utilise la contrapoée du lemme pour vérifier que F n'est pas dériable en t. On doit donc calculer les $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$
Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
c_j &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k cos(b^k x)\right) u(b^j(x-t))dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} a^k \left(\frac{e^{ib^kx}+e^{-ib^kx}}{2}\right) u(b^j(x-t))dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ib^kx} u(b^j(x-t))dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-ib^kx} u(b^j(x-t))dx\right)
\end{aligned}$$

(L'interversion série-intégrale étant justifiée par la convergence normale de la série) De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{ib^kx} u(b^j(x-t))dx &\underset{s=b^j(x-t)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{ib^k(\frac{s}{b^j}+t)} u(s)\frac{ds}{b^j} \\
&= \frac{e^{ib^kt}}{b^j} \int_{\mathbb{R}} e^{ib^{k-j}s} u(s)ds \\
&= \frac{e^{ib^kt}}{b^j} \hat{u}(-b^{k-j}) \\
&= \frac{e^{ib^kt}}{b^j} v(-b^{k-j}) = 0
\end{aligned}$$

(car v est à support dans $]b^{-1}, b[$)
De même :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-ib^kx} u(b^j(x-t))dx &\underset{s=b^j(x-t)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-ib^k(\frac{s}{b^j}+t)} u(s)\frac{ds}{b^j} \\
&= \frac{e^{-ib^kt}}{b^j} \int_{\mathbb{R}} e^{-ib^{k-j}s} u(s)ds \\
&= \frac{e^{-ib^kt}}{b^j} \hat{u}(b^{k-j}) \\
&= \frac{-e^{ib^kt}}{b^j} v(b^{k-j}) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ \frac{-e^{ib^jt}}{b^j} \text{ si } k = j \end{cases}
\end{aligned}$$

(car v est à support dans $]b^{-1}, b[$ et $v(1) = 1$). Finalement, on obtient :

$$c_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2} \frac{-e^{ib^jt}}{b^j} \delta_{k,j} = \frac{a^j}{2b^j} e^{-ib^jt}$$

Donc :

$$|c_j b^{2j}| = \frac{a^j b^j}{2} \underset{k \to \infty}{\not\to} 0$$

car $ab \geq 1$. Par contraposée du lemme, on en déduit que F n'est pas dérivable en t.